УДК 581.1 DOI 10.12737/4542

Математическое моделирование подъёма воды в капиллярах, имеющих форму цилиндрической вертикальной спирали*

И. А. Кипнис, Ю. М. Вернигоров

Ксилема растений представляет собой сложную систему трубок, в которых происходит продвижение воды в вертикальном и в горизонтальном направлениях. В стволах многих растений прямолинейные капилляры расположены вертикально. Однако растущая вверх верхушка стебля может совершать автономные круговые движения, которые называют круговыми нутациями. Некоторые растения всегда обвивают опору, что приводит к спиральному росту. Ксилема таких растений должна соответствовать их криволинейной части. Спиралевидный подъём воды имеет место и в прямолинейных стволах некоторых растений. В настоящее время в научной литературе не представлен расчёт подъёма воды в спиралевидных капиллярах. В данной работе решена задача математического моделирования подъёма воды в капиллярах, имеющих форму цилиндрической спирали. Показано, что в капилляре спиралевидной формы перемещается большее количество воды по сравнению с прямолинейными и криволинейными капиллярами той же длины.
Ключевые слова: *капилляры, ксилема, модель, транспирация, растение.*

Введение. Подъём воды в системе прямолинейных и криволинейных капилляров равного радиуса обусловлен силами поверхностного натяжения водных менисков, а ветвящаяся капиллярная структура обусловливает специфическую внешнюю форму растения [1–5]. Математическое моделирование восходящего транспирационного тока воды в прямолинейных сосудах ксилемы древесных стволов [2] позволило определить условия, при которых движение воды может происходить как в вертикальном направлении восходящим током вдоль оси ствола, так и по горизонтали, перпендикулярно его оси.

По-видимому, ксилема высших растений не является набором простых вертикальных трубок, по которым движется вода, а представляет собой более сложную структуру, в которой продвижение воды происходит не только прямолинейно. Для понимания этого достаточно посмотреть на многочисленные и многообразные жизненные формы растений.

Стволы многих растений прямолинейны. В отличие от стволов боковые побеги и ветви часто выглядят как разнообразные математические кривые линии. Нелинейность боковых побегов может быть обусловлена воздействием на них ауксина и таких явлений, как отрицательный гравитропизм, фото-, термо- и хемотропизмы . Криволинейные ветви могут иметь самый разный вид. Так, например, ствол фанерофитов [6, стр. 133, рис. 68] вертикален, а боковые ветви напоминают математическую экспоненциальную кривую. Внешне боковые побеги эвгалофита солероса (Salicornia sp.) [7, стр. 242, рис. 231] имеют вид параболических кривых, попарно симметрично отходящих от прямолинейного ствола. Точно так же расположены боковые побеги погремка большого (Rhinanthus major) [7, стр. 260, рис. 246].

Известны также автономные круговые движения растущей вверх верхушки стебля — круговые нутации [8], [9], [10, стр. 408]. Так лиана хмеля (Humulus lupulus), обвивающаяся вокруг опоры, образует цилиндрическую спираль [8, стр. 260, 261, рис. 247]. Гречишка вьюнковая (Polygonum convolvulus), жимолость (Lonicera periclymenum) и вьюнок заборный (Calystegia cepium) тоже всегда обвивают опору, что обеспечивает им рост в форме спирали. У лазящих растений, например у гороха, в цилиндрическую спираль закручиваются усики, а иногда усиком может быть и модифицированная ветка, как у винограда (Vitis vinifera) [8, стр. 225–227].

* Работа выполнена в рамках инициативной НИР.

Естественно, что ксилема таких растений (или отдельных их частей) должна быть криволинейна и по виду соответствовать той криволинейной части растения, в которой расположена. Криволинейность ксилемы предполагает пространственную кривизну составляющих её цепочек трахеид и сосудов. Растение или отдельные его части могут иметь форму цилиндрической спирали, обвивающей опору. Но спиралевидный подъём воды иногда имеет место и в прямолинейных стволах. Так, например, в [11] авторы, ссылаясь на сообщение К. Томаса (1967), проводившего исследования по движению воды в кизиле, сообщают, что краска, введённая в ксилему, передвигается по спирали приблизительно на 90° на каждый метр подъёма. В этой же работе приводится утверждение И. Рудинского и Р. Вите (1959) о том, что спиральный подъём ксилемного сока, в отличие от строго вертикального, обеспечивает более равномерное распределение воды по всем частям кроны. Данные выводы основаны на следующем наблюдении. Дуб белый (ксилемный сок передвигается вверх почти вертикально) меньше повреждается от болезни увядания, вызванной сосудистым бактериозом, чем дуб болотный (восходящий транспирационный ток проходит по спирали и расходится в верхней части растения).

Спиралевидное продвижение транспирационного тока свидетельствует о наличии кроме вертикальной ещё и горизонтальной его составляющей. В источниках отсутствуют сведения о расчётах подъёма воды в спиралевидных капиллярах, в том числе применительно к движению воды в растениях. Поэтому стоит задаться вопросом о подъёме воды в капиллярах, имеющих форму цилиндрической спирали, что и является целью данной работы.

Теоретическая модель. Рассмотрим капилляр с внутренним радиусом r, наружным диаметром $d_н = 2(r + \varepsilon)$ (ε — толщина стенки капилляра). Данный капилляр закручен в виде цилиндрической спирали диаметром D с углом подъёма витка, равным β, и шагом δ (рис. 1).

Развёртка витка цилиндрической спирали представляет собой прямоугольный треугольник с гипотенузой $l_в$, катетами D и δ, углом β между $l_в$ и D. Учитывая это, длину витка $l_в$ спирали можно определить из соотношения

$$l_в = \sqrt{D^2 + \delta^2} = \delta\sqrt{1 + (\mathrm{ctg}\,\beta)^2} = D\sqrt{1 + (\mathrm{tg}\,\beta)^2}. \quad (1)$$

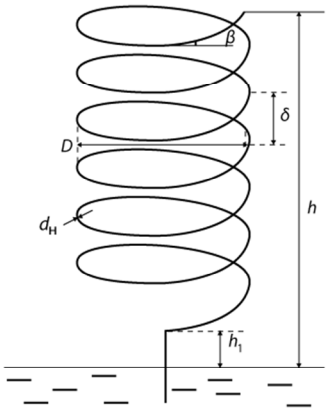

Рис. 1. Капилляр в виде цилиндрической спирали

Из (1) следует, что длина витка спирали увеличивается:

– во-первых, прямо пропорционально диаметру спирали,

– во-вторых, по мере увеличения угла наклона витка (от его минимально возможного значения $\beta = \mathrm{arctg}\,(D/2\,(r + \varepsilon))$, стремясь к ∞ при $\beta \to 90°$).

Последнее означает, что шаг δ между витками спирали стремится к ∞, а капилляр становится прямолинейным вертикальным.

В [1] и [2] показано, что величина продвижения воды L в прямолинейном капилляре с внутренним радиусом r, наклонённом к поверхности воды, равна

$$L = h / \sin\beta = \frac{2\sigma\cos\alpha}{r\rho g\sin\beta}, \quad (2)$$

где h — высота подъёма воды в вертикальном капилляре радиуса r; β — угол наклона капилляра к поверхности воды; α — угол смачивания, зависящий от молекулярного взаимодействия на границе раздела трёх сред: стенки капилляра, жидкости и воздуха; σ и ρ — соответственно коэффициент поверхностного натяжения и плотность воды; g — ускорение свободного падения.

В случае криволинейного капилляра, имеющего вид $y = h_1 + kx^m$ (h_1 — высота прямолинейной вертикальной части капилляра от поверхности воды до начала криволинейного капилляра, kx^m — криволинейная часть капилляра, представляющая параболу степени m с фокусом, равным k), величина продвижения воды равна [4, 5]

$$\breve{L} = (h - h_1)/(1 - \cos\theta), \quad (3)$$

где $\theta = \operatorname{arctg}\left[km\left(\sqrt[m]{\frac{h-h_1}{k}}\right)^{m-1}\right]$ — угол наклона касательной к мениску воды в капилляре к горизонтали.

В [1–5] показано, что в общем случае высота подъёма воды в прямолинейных и криволинейных капиллярах не зависит от угла наклона к горизонтали и вида их кривизны и всегда равна высоте подъёма воды h в одиночном вертикальном прямолинейном капилляре равного радиуса. Из этого следует, что количество витков n спирали при заданных значениях $d_н$, δ ($h_1 = 0$) не может превышать величины, определяемой соотношением:

$$n = h / (d_н + \delta) = h / (2(r + \varepsilon) + \delta), \quad (4)$$

а максимально возможное количество витков в спирали при отсутствии промежутка между ними ($\delta = 0$):

$$n_{макс} = h / (2(r + \varepsilon)). \quad (5)$$

При этом угол подъёма спирали минимален и равен

$$\beta_{мин} = \operatorname{arctg}(2(r + \varepsilon)/D). \quad (6)$$

Из (1) и (4) следует, что величина продвижения воды в капилляре в виде цилиндрической спирали определится соотношением

$$\breve{L}_ц = nl_в = hD\sqrt{1 + (\operatorname{tg}\beta)^2} \Big/ \left(2(r + \varepsilon) + \delta\right) \quad (7)$$

или

$$\breve{L}_ц / h = D\sqrt{1 + (\operatorname{tg}\beta)^2} \Big/ \left(2(r + \varepsilon) + \delta\right). \quad (8)$$

Общее количество витков n, суммарная длина которых равна длине прямолинейного капилляра такого же радиуса:

$$n = L/l_в = (h - h_1)/(l_в \sin\beta) = (h - h_1)\Big/\left(D\sin\beta\sqrt{1 + (\operatorname{tg}\beta)^2}\right) = (h - h_1)\Big/\left(\sin\beta\sqrt{D^2 + \delta^2}\right). \quad (9)$$

Здесь угол подъёма витка спирали β находится в пределах его минимально возможного значения, согласно (6) равного

$\operatorname{arctg}(2(r + \varepsilon) / D)$, когда $n = n_{макс}$, до 90°, когда $n \to 1$.

Физический смысл последнего заключается в том, что капиллярная система из спиралевидной превращается в вертикальную прямолинейную, описываемую выражением (2).

Приравнивая выражения (4) и (9), можно записать соотношение:

$$(h - h_1) \Big/ \left(D \sin\beta \sqrt{1 + (\mathrm{tg}\beta)^2} \right) = (h - h_1) / (d_н + \delta). \quad (10)$$

Откуда минимально возможный диаметр спирали $D_{мин}$ при заданных n, $d_н$, δ и β равен:

$$D_{мин} = \frac{d_н + \delta}{\sin\beta \sqrt{1 + (\mathrm{tg}\beta)^2}}. \quad (11)$$

Из (11) следует, что диаметр витка спирали не зависит от h и n и может принимать любые значения, ограниченные только углом $\beta_{мин}$.

При δ = 0 величина D соответствует случаю, когда витки спирали плотно примыкают друг к другу. Следует заметить, что в рассмотренном выше случае максимально плотно витки будут уложены и тогда, когда угол β будет иметь минимально возможное (см. (6)) значение. При этом общая длина спирали максимальна и, следовательно, величина продвижения и количество воды в спирали данного диаметра максимальны.

При $n = 1$, т. е. когда в спирали присутствует только один виток, его диаметр может быть определён из (9) с учётом (7) в виде

$$D = \frac{h - h_1}{\sin\beta \sqrt{1 + (\mathrm{tg}\beta)^2}}. \quad (12)$$

В случае, когда $1 < n < n_{макс}$, диаметр витка может быть определён из (9) и равен

$$D = \frac{h - h_1}{n \sin\beta \sqrt{1 + (\mathrm{tg}\beta)^2}}. \quad (13)$$

Вывод. Полученные результаты показывают, что пространственная спиралевидная структура капилляра при прочих равных условиях позволяет перемещать больший объём воды в меньшем пространственном объёме по сравнению с прямолинейным и криволинейным капиллярами той же длины.

Библиографический список

1. Вернигоров, Ю. М. Математическое моделирование распределения жидкости в ветвящихся капиллярных системах / Ю. М. Вернигоров, И. А. Кипнис // Вестник Дон. гос. техн. ун-та. — 2010. — Т. 10, № 8 (51). — С. 1195–1206.

2. Вернигоров, Ю. М. Капиллярная модель древесных стволов / Ю. М. Вернигоров, И. А. Кипнис // Вестник Дон. гос. техн. ун-та. — 2012. — № 6 (67). — С. 26–40.

3. Кипнис, И. А. Продвижение воды в системе несимметричных линейных капилляров / И. А. Кипнис, Ю. М. Вернигоров // Вестник Дон. гос. техн. ун-та. — 2013. — № 3—4 (72—73). — С. 54–63.

4. Кипнис, И. А. Капиллярная модель габитуса растений / И. А. Кипнис, Ю. М. Вернигоров // Известия Юж. федер. ун-та. Техн. науки. — 2013. — № 9. — С. 250–255.

5. Кипнис, И. А. Математическая модель подъёма воды в простых криволинейных капиллярах / И. А. Кипнис, Ю. М. Вернигоров // Вестник Дон. гос. техн. ун-та. — 2013. — № 5/6 (74). — С. 110–120.

6. Лотова, Л. И. Ботаника. Морфология и анатомия высших растений : учеб. пособие для студентов биолог. фак. ун-тов. / Л. И. Лотова. — 4-е изд., доп. — Москва : Либроком, 2010. — 512 с.

7. Тимонин, А. К. Ботаника: учеб. для студентов вузов. В 4 т. Т. 3. Высшие растения / А. К. Тимонин. — Москва : Академия, 2007. — 352 с.

8. Даддингтон, К. Эволюционная ботаника / К. Даддингтон ; пер. с англ. Е. Е. Беренгартен ; под ред. Т. И. Серебряковой. — Москва : Мир, 1972. — 307 с.

9. Якушкина, Н. И. Физиология растений : учеб. для студентов вузов / Н. И. Якушкина, Е. Ю. Бахтенко. — Москва : Владос, 2005. — 463 с.

10. Зитте, П. Ботаника : учеб. для вузов : в 4 т. Т. 2 : Физиология растений / П. Зитте [и др.] ; на основе учеб. Э. Страсбургера [и др.] ; под ред. В. В. Чуба. — Москва : Академия, 2008. — 496 с.

11. Крамер, П. Д. Физиология древесных растений / П. Д. Крамер, Т. Т. Козловский. — Москва : Лесная промышленность, 1983. — 464 с.

Материал поступил в редакцию 01.12.2013.

References

1. Vernigorov, Y. M., Kipnis, I. A. Matematicheskoye modelirovaniye raspredeleniya zhidkosti v vetvyashchikhsya kapillyarnykh sistemakh. [Mathematical modeling of liquid distribution in branch capillary systems.] Vestnik of DSTU, 2010, vol. 10, no. 8 (51), pp. 1195–1206 (in Russian).

2. Vernigorov, Y. M., Kipnis, I. A. Kapillyarnaya model drevesnykh stvolov. [Capillary model of tree trunks.] Vestnik of DSTU, 2012, no. 6 (67), pp. 26–40 (in Russian).

3. Kipnis, I. A., Vernigorov, Y. M. Prodvizheniye vody v sisteme nesimmetrichnykh lineynykh kapillyarov. [Water advancing in asymmetrical linear capillary system.] Vestnik of DSTU, 2013, no. 3–4 (72–73), pp. 54–63 (in Russian).

4. Kipnis, I. A., Vernigorov, Y. M. Kapillyarnaya model gabitusa rasteniy. [Capillary model of plant habitus.] Izvestiya SFedU. Engineering sciences. 2013, no. 9, pp. 250–255 (in Russian).

5. Kipnis, I. A., Vernigorov, Y. M. Matematicheskaya model podyema vody v prostykh krivolineynykh kapillyarakh. [Water rise mathematical model in simple curvilinear capillaries.] Vestnik of DSTU, 2013, № 5/6 (74), pp. 110–120 (in Russian).

6. Lotova, L. I. Botanika. Morfologiya i anatomiya vysshikh rasteniy : ucheb. posob. dlya studentov biolog. fak. un-tov. [Botany. Morphology and anatomy of higher plants: textbook. Ed. 4th add.] Moscow: Librokom, 2010, 512 p. (in Russian).

7. Timonin, A. K. Botanika : uchebnik dlya studentov vuzov. V 4 t. T. 3. Vysshiye rasteniya. [Botany: textbook for students. In 4vol. Vol. 3 Higher Plants.] Moscow: Akademiya, 2007, 352 p. (in Russian).

8. Daddington, K. Evolyutsionnaya botanika. [Evolutionary Botany.] Trans. from Engl. by E. E. Berengarten, T. I. Serebryakova, ed. Moscow: Mir, 1972, 307 p. (in Russian).

9. Yakushkina, N. I., Bakhtenko, E. Y. Fiziologiya rasteniy: uchebnik dlya studentov vuzov. [Plant physiology: textbook for students.] Moscow: Vlados, 2005, 463 p. (in Russian).

10. Zitte, P., et al. Botanika: uchebnik dlya vuzov: v 4 t. T. 2 : Fiziologiya rasteniy. [Botany: textbook for high schools: in 4 vol. based on the textbook by E. Strasburger. Vol. 2: Plant Physiology.] Trans. from German. V.V. Chub, ed. Moscow: Akademiya. 2008, 496 p. (in Russian).

11. Kramer, P. D., Kozlowski, T. T. Fiziologiya drevesnykh rasteniy. [Physiology of woody plants.] Trans. from Engl. Moscow: Lesnaya promyshlennost, 1983, 464 p. (in Russian).

MATHEMATICAL MODELING OF WATER RISE IN CAPILLARIES IN FORM OF CYLINDRICAL VERTICAL SPIRAL*

I. A. Kipnis, Y. M. Vernigorov

A plant xylem is a complex system of pipes in which the movement of water occurs both vertically and horizontally. Rectilinear capillaries are arranged vertically in the trunks of lots of plants. However, a stem crown growing upwards can execute an independent circular motion called circular nutation. Some plants always wind around the bearer resulting in the spiral growth. The xylem of such plants should conform to their curved parts. A spiral water rise occurs in the rectilinear stems of some plants as well. Currently, the calculation of the water rise in the spiral capillaries is not described in the scientific literature. The problem on the mathematical modeling of the water rise in capillaries having the form of a cylindrical spiral is solved in the paper. It is shown that more water moves through the spiral capillary than through the rectilinear and curvilinear capillaries of the same length.
Keywords: *capillaries, xylem, model, transpiration, plant.*

* The research is done within the frame of the independent R&D.